ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Huyền Trang

BIỂU DIỄN ĐA THỨC KHÔNG ÂM TRÊN DẢI $[0,1] \times \mathbb{R}$ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Thị Huyền Trang

BIỂU DIỄN ĐA THỨC KHÔNG ÂM TRÊN DẢI $[0,1]\times\mathbb{R}$ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: TS. Hồ Minh Toàn

Thái Nguyên, năm 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2020

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Huyền Trang

Xác nhận
của khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Hồ Minh Toàn - người đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình cho em, tạo mọi điều kiện thuận lợi và là nguồn động lực quan trọng để em có thể hoàn thành tốt Luận văn tốt nghiệp này. Em xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong khoa Toán, gia đình, bạn bè đã quan tâm, giúp đỡ, động viên em.

Trong quá trình làm Luận văn không tránh khỏi những sai sót, em rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành từ phía thầy cô và các bạn. Em xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2020

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Huyền Trang

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho $f \in \mathbb{R}[X]$ là đa thức theo n biến $X_1, \dots, X_n$. Nếu f biểu diễn được thành tổng bình phương hữu hạn đa thức trong $\mathbb{R}[X]$ thì rõ ràng f không âm trên $\mathbb{R}^n$. Do đó, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là chiều ngược lại có đúng không, tức là

$$f \geqslant 0 \text{ trên } \mathbb{R}^n \Longrightarrow f \in \sum \mathbb{R}[X]^2?$$

Câu trả lời đúng cho đa thức một biến, nhưng không đúng nói chung cho nhiều biến và được Hilbert chứng minh rất hình thức vào năm 1888.

Bài toán trên được phát biểu mở rộng cho trường hợp biểu diễn đa thức không âm trên một tập nghiệm K của hệ hữu hạn bất phương trình đa thức. Giả sử $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ là họ đa thức thực m biến và $K \subset \mathbb{R}^n$ được xác định bởi

$$K_G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}.$$

Một tập $T \subset \mathbb{R}[x]$ được gọi là tiền thứ tự nếu T chứa tổng bình phương, đóng với phép cộng và nhân. Ký hiệu T_G là tiền thứ tự bé nhất chứa G. Khi đó mọi đa thức thuộc T_G đều không âm trên K. Vì vậy bài toán biểu diễn đa thức dương trên K được phát biểu như sau: *Nếu đa thức* $f \in \mathbb{R}[x]$ *dương trên* K *thì* f *có thuộc* T *không?*

Gần đây, với lời giải của Schmudgen [7] khẳng định đa thức $f \in T_G$ trong trường hợp tập K compact vào năm 1991, và cho đến bây giờ chỉ có lời giải cho một số trường hợp tập K không compact.

Mục đích của luận văn là trình bày lại kết quả về biểu diễn đa thức không âm trên dải $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Kết quả này được viết trong bài báo: Marshall M. (2010), "Polynomials non-negative on a strip", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138** (5), 1559–1567 và được mở rộng trong bài báo Nguyen H. and Powers V. (2012), "Polynomials non-negative on strips and half-strips", *J. Pure Appl. Algebra*, **216** (10), 2225–2232.

Ngoài Mục lục, Lời mở đầu, Tài liệu tham khảo và Kết luận, nội dung chính của Luận văn gồm 2 chương, được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [2], [3]:

- *Chương 1*: Biểu diễn đa thức không âm trên dải $[0, 1] \times \mathbb{R}$
- *Chương 2*: Một số ứng dụng

Trong Chương 1 cung cấp những khái niệm cơ bản trong Hình học đại số thực cho đa thức và các kết quả được sử dụng trong Luận văn gồm: Bài toán thứ 17 của Hilbert và Định lý biểu diễn đa thức không âm trên dải.

Trong chương 2 trình bày ứng dụng của Định lý biểu diễn đa thức không âm trong tối ưu đa thức và giải quyết Bài toán mômen.

Chương 1

Biểu diễn đa thức không âm trên dải $[0,1] \times \mathbb{R}$

Trong chương 1 trình bày một số kiến thức về biểu diễn đa thức không âm trên dải. Các kiến thức trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [2], [3].

1.1. Giới thiệu bài toán và các kiến thức chuẩn bị

Trước tiên, luận văn trình bày một số khái niệm cơ bản trong Hình học đại số thực cho đa thức được trích dẫn từ công trình của Marshall.

1.1.1. Định nghĩa

Cho A là một vành giao hoán có đơn vị 1. Kí hiệu $\sum A^2$ là tập hợp của các tổng bình phương trong A, tức là tập hợp các phần tử có dạng

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2, k \in \mathbb{N}, a_i \in A, i = 1, \ldots, k.$$

Cho $n \geq 1$, kí hiệu $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \mathbb{R}[X]$ là vành các đa thức n biến $X_1, \ldots, X_n$ với hệ số thực; $\sum \mathbb{R}[X]^2$ là tập hợp gồm tổng hữu hạn các bình phương của các đa thức trong $\mathbb{R}[X]$, tức là tập hợp các phần tử có dạng $\sum_{i=1}^{k} f_i^2, k \in \mathbb{N}, f_i \in \mathbb{R}[X], i = 1, \ldots, k$.

Định nghĩa 1.1.1. *Cho A là một vành giao hoán có đơn vị 1.*

(i) *Một môđun bậc hai trên A là một tập con M của A thỏa mãn:*

- $M + M \subseteq M$;
- $1 \in M$;
- $a^2 M \subseteq M$ *với mọi* $a \in A$.

(ii) *Một tiền thứ tự trên A là một tập con T của A thỏa mãn:*

- $T + T \subseteq T$;
- $T \cdot T \in T$;
- $a^2 \in T$ *với mọi* $a \in A$.

Từ định nghĩa 1.1.1 chúng ta có một số nhận xét sau.

Chú ý 1.1.2. Cho A là một vành giao hoán có đơn vị là 1. Khi đó:

(i) Mỗi tiền thứ tự trên A là một môđun bậc hai trên A.

(ii) $\sum A^2$ là tiền thứ tự nhỏ nhất trên A.

Bây giờ chúng ta xét A là vành đa thức $\mathbb{R}[X] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ và $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ là một tập con của $\mathbb{R}[X]$. Khi đó: